数理解析研究所講究録 1270 巻 2002 年 1-10

写像類群の有限部分群と森田-MUMFORD 類

秋田 利之

1. はじめに

Σ_g を種数 $g \geq 2$ の向きづけられた閉曲面, $\mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ を Σ_g の向きを保つ微分同相全体のなす群とする (位相は C^∞-位相). $\mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ の連結成分のなす群 Γ_g を Σ_g の 写像類群 とよぶ.

写像類群のコホモロジーは位相幾何と代数幾何にまたがる重要な研究対象である. 実際 $B\mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ を $\mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ の分類空間 (すなわち向きづけられた Σ_g-束の分類空間) とすると, Earle-Eells [4] の結果により Γ_g の Eilenberg-MacLane 空間 $K(\Gamma_g, 1)$ は $B\mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ とホモトピー同値であり, 従って両者のコホモロジーは一致する:

$$H^*(\Gamma_g, \mathbb{Z}) \cong H^*(B\mathrm{Diff}_+\Sigma_g, \mathbb{Z}).$$

従って Γ_g のコホモロジー類は, 向きづけられた Σ_g-束の (universal な) 特性類と考えられる. 一方で種数 g のコンパクト Riemann 面のモジュライ空間 M_g と Γ_g の有理係数コホモロジーは同型であることが知られている:

$$H^*(M_g, \mathbb{Q}) \cong H^*(\Gamma_g, \mathbb{Q}).$$

Γ_g のコホモロジー類の中で最も重要なものが, 森田茂之氏 [15] と Mumford [17] により独立に定義された 森田-Mumford 類 $e_n \in H^{2n}(\Gamma_g, \mathbb{Z})$ であり, 位相幾何の観点からは次のように定義される. $\pi : E \to B$ を向きづけられた Σ_g-束 (Σ_g をファイバーとする向きづけられた滑らかなファイバー束), $T_{E/B}$ を π のファイバーに沿った接束とする. $T_{E/B}$ は E 上の向きづけられた実 2 次元ベクトル束である. π の (第 n) 森田-Mumford 類は

$$e_n(\pi) := \pi_!(e(T_{E/B})^{n+1}) \in H^{2n}(B, \mathbb{Z})$$

により定義される. ここで $e(T_{E/B}) \in H^2(B, \mathbb{Z})$ は $T_{E/B}$ の Euler 類,

$$\pi_! : H^*(E, \mathbb{Z}) \to H^{*-2}(B, \mathbb{Z})$$

は Gysin 準同型 (ファイバーに沿った積分) である. 上の構成の自然性により (universal な) 森田-Mumford 類 $e_n \in H^{2n}(\Gamma_g, \mathbb{Z})$ が定義される (Mumford は

モジュライ空間 M_g の有理コホモロジー類として e_n に当たるものを導入した).

離散群のコホモロジーを調べる一つの手段として, その有限部分群たちのコホモロジーを調べることが挙げられる (後者は前者の「一次近似」と考えることができる). 筆者は写像類群の有限部分群上での, 森田-Mumford 類の振る舞いを調べることにより, 興味深い結果をいくつか得ることができた (部分的には河澄響矢氏, あるいは河澄・植村毅両氏との共同研究による). この小文ではそれらの結果と関連する事実を解説したい.

注. この文章は 2001 年度日本数学会年会トポロジー分科会特別講演のアブストラクトに加筆訂正を加えたものである. 数理研での講演では主に 4 節の内容を解説した.

2. 植村-河澄の公式

G を写像類群 Γ_g の有限部分群とする. Kerckhoff [12] の結果により, G は $\mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ の有限部分群と見なすことができる (すなわち自然な射影 $\mathrm{Diff}_+\Sigma_g \twoheadrightarrow \Gamma_g$ が G 上で切断を持つ). この同一視のもとで, G は Σ_g に向きを保って効果的に作用する. 各点 $x \in \Sigma_g$ に対して G_x を x における固定部分群とし

$$\mathcal{S} := \bigcup_{1\neq\gamma\in G} \Sigma_g^\gamma = \{x \in \Sigma_g \mid |G_x| > 1\}$$

とおく (Σ_g^γ は $\gamma \in G$ の不動点集合, $|G_x|$ は G_x の位数). G の作用が Σ_g の向きを保つことから, 全ての $x \in \Sigma_g$ に対し G_x は巡回部分群であること, $\mathcal{S}$ が有限集合となることがわかる. $\{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$ を $\mathcal{S}$ の G-軌道の代表元の集合としよう:

$$\mathcal{S} = Gx_1 \sqcup Gx_2 \sqcup \cdots \sqcup Gx_q.$$

各 x_i に対して固定部分群 G_{x_i} の生成元 γ_i で, 微分 $d\gamma_i : T_{x_i}\Sigma_g \to T_{x_i}\Sigma_g$ が $2\pi/|G_{x_i}|$ 回転となるものが一意的に存在する. $\hat{\gamma}_i$ を γ_i の共役類とし, $\hat{\gamma}_i$ たちを集めたもの

$$\langle \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \ldots, \hat{\gamma}_q \rangle$$

を <u>不動点データ</u> と呼ぶ (不動点データは Grieder [5] によって定義された). 不動点データは写像類群の有限部分群の不変量になることが知られている [19]

(つまり G の $\mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ の有限部分群との同一視の仕方によらない). $G \subset \Gamma_g$ の不動点データ $\langle \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \ldots, \hat{\gamma}_q \rangle$ は条件

$$\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_q \in [G,G]$$

と Riemann-Hurwitz の等式

$$2g-2 = |G|(2h-2) + |G|\left(\sum_{i=1}^{q} 1 - \frac{1}{\mathrm{ord}\,\gamma_i}\right)$$

を満たす. ただし h は軌道空間 Σ_g/G の種数 (Σ_g/G も向きづけられた閉曲面になる), $\mathrm{ord}\,\gamma_i$ は γ_i の位数である.

G を写像類群 Γ_g の有限部分群とする. 制限写像

$$\mathrm{res}_G^{\Gamma_g} : H^{2n}(\Gamma_g, \mathbb{Z}) \to H^{2n}(G, \mathbb{Z})$$

による森田-Mumford 類 $e_n \in H^{2n}(\Gamma_g, \mathbb{Z})$ の像 $e_n|_G \in H^{2n}(G, \mathbb{Z})$ を G の森田-Mumford 類と呼ぶことにしよう. $e_n|_G$ の振る舞いを調べる上での出発点となるのが, 以下に述べる植村-河澄の公式 [11] である. 各 $\gamma \in G$ に対して, 複素 1 次元表現 $\rho_\gamma : \langle\gamma\rangle \to U(1)$ を $\gamma \mapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}/\,\mathrm{ord}\,\gamma)$ により定義する (ここで $\langle\gamma\rangle$ は γ で生成される部分群). 表現 ρ_γ により, $\langle\gamma\rangle$ の分類空間 $B\langle\gamma\rangle$ 上の複素直線束が定まる. その第 1 Chern 類を $c(\gamma) \in H^2(\langle\gamma\rangle, \mathbb{Z})$ とおく.

定理 1 ([11]). G を写像類群 Γ_g の有限部分群, $\langle \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \ldots, \hat{\gamma}_q \rangle$ を G の不動点データとする. そのとき

$$e_n|_G = \sum_{i=1}^{q} \mathrm{tr}_{\langle\gamma_i\rangle}^{G}(c(\gamma_i)^n) \in H^{2n}(G, \mathbb{Z}) \tag{1}$$

が全ての n に対して成り立つ.

ここで $\mathrm{tr}_{\langle\gamma_i\rangle}^{G} : H^*(\langle\gamma_i\rangle, \mathbb{Z}) \to H^*(G, \mathbb{Z})$ は <u>transfer</u> をあらわす. transfer の共役不変性から $\mathrm{tr}_{\langle\gamma_i\rangle}^{G}(c(\gamma_i)^n)$ は $\hat{\gamma}_i$ の代表元の選び方によらないので, 定理 1 により $e_n|_G$ が G の不動点データのみで定まることがわかる.

3. 巾零性

定理 1 を用いて, G の森田-Mumford 類 $e_n|_G$ を具体的に計算するのは通常は困難であるが (群のコホモロジー $H^*(G, \mathbb{Z})$ も transfer も一般には計算できない), G が有限巡回群あるいは elementary abelian p-群の場合は, 定理 1 によっ

て $e_n|_G$ が計算可能である. ここで素数 p に対して $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^k$ と同型な有限群を rank k の elementary abelian p-群と言う. elementary abelian p-群の場合の計算結果を以下に示す (有限巡回群の場合は [1, 2, 20] を参照).

命題 1 ([1, 2]). *$G \subset \Gamma_g$ を rank k の elementary abelian p-部分群とすると*

1. $k \geq 2$ なら全ての $n \geq 1$ に対して $e_n|_G$ は自明
2. $k = 1$ かつ $n \equiv -1 \pmod{p-1}$ なら $e_n|_G$ は自明

が成り立つ.

上の命題と Quillen の F-同型定理 [18] を組み合わせることにより, 写像類群の森田-Mumford 類 (の mod p reduction) に関する結果が得られる.

定理 2 ([1]). p を素数とする. $n \equiv -1 \pmod{p-1}$ ならば $e_n \in H^{2n}(\Gamma_g, \mathbb{F}_p)$ は巾零である. 特に全ての n に対して $e_n \in H^{2n}(\Gamma_g, \mathbb{F}_2)$ は巾零である.

ただし $\mathbb{F}_p$ は p 個の元からなる体である. $g = 2$ または 3 の場合は, 定理 2 の仮定の下で $e_n \in H^{2n}(\Gamma_g, \mathbb{F}_p)$ が自明であることを筆者は証明した [1]. この事実を踏まえて筆者は以下のような予想を立てた.

予想 1. $n \equiv -1 \pmod{p-1}$ ならば $e_n \in H^{2n}(\Gamma_g, \mathbb{F}_p)$ は自明である. 特に全ての n に対して $e_n \in H^{2n}(\Gamma_g, \mathbb{F}_2)$ は自明である.

Harer [7] による $H^2(\Gamma_g, \mathbb{Z})$ の計算と Grothendieck-Riemann-Roch の定理 (詳しくは 5 節を参照) から, $n = 1$ の場合は予想 1 が正しいことがわかる (すなわち $e_1 \in H^2(\Gamma_g, \mathbb{Z})$ の mod 2 reduction と mod 3 reduction は自明となる).

超楕円的対合 $\iota \in \Gamma_g$ の Γ_g における中心化群 $\mathcal{H}_g$ を <u>超楕円的写像類群</u> と呼ぶ. 河澄氏は超楕円的曲線の族に関する考察から, 超楕円的写像類群 $\mathcal{H}_g$ に対しても予想 1 が正しいことを証明した.

定理 3 ([10]). $n \equiv -1 \pmod{p-1}$ ならば $e_n \in H^{2n}(\mathcal{H}_g, \mathbb{F}_p)$ は自明である. 特に全ての n に対して $e_n \in H^{2n}(\mathcal{H}_g, \mathbb{F}_2)$ は自明である.

ただし e_n の $\mathcal{H}_g$ への制限を同じ記号で表した. 他方で $n \not\equiv -1 \pmod{p-1}$ の場合には, $e_n \in H^{2n}(\Gamma_g, \mathbb{F}_p)$ は一般には自明でも巾零でもないことがわかっている (詳しくは [1] を参照).

注. U. Tillmann 氏からの知らせによると, [13] の結果を使うことにより, $n \ll g$ という仮定の元で予想 1 が正しいことを証明できるそうである.

4. 同変ボルディズムと G-符号数

有限群 G が向きづけられた閉曲面 Σ_g に, 向きを保って効果的に作用しているとする. 前節でも触れたように, このような作用は単射準同型 $\kappa : G \hookrightarrow \mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ と 1:1 に対応するので以下では両者を同一視する. $g \geq 2$ と仮定しているので, κ と射影 $p : \mathrm{Diff}_+\Sigma_g \to \Gamma_g$ の合成 $p \circ \kappa : G \to \Gamma_g$ は単射である. $p \circ \kappa$ により G を Γ_g の有限部分群と見なして, その森田-Mumford 類を $e_n(\kappa) \in H^*(G, \mathbb{Z})$ と書くことにしよう.

$e_n(\kappa)$ は G-作用 κ の不変量と思うことができる. 例えば κ が自由な G-作用ならば, 全ての $n \geq 1$ に対して $e_n(\kappa)$ は自明である [11]. この節では同変ボルディズムおよび G-符号数と森田-Mumford 類の関係に触れよう.

G を有限群とし, $\kappa_1 : G \hookrightarrow \mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ と $\kappa_2 : G \hookrightarrow \mathrm{Diff}_+\Sigma_h$ を向きづけられた閉曲面 Σ_g と Σ_h 上の G-作用とする. 向きづけられたコンパクト 3 次元多様体 V と, V 上の向きを保つ G-作用 Φ が存在して

1. $\partial V = \Sigma_g \cup -\Sigma_h$
2. $\Phi|_{\partial V} = \kappa_1 \cup \kappa_2$

を満たすとき, κ_1 と κ_2 は <u>同変ボルダント</u> と言う (正確には有向同変ボルダント). 同変ボルダントが同値関係になることは容易に確かめられる. とくに G-作用 $\kappa : G \hookrightarrow \mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ に対して, 向きづけられたコンパクト 3 次元多様体 V と, V 上の向きを保つ G-作用 Φ が存在して

1. $\partial V = \Sigma_g$
2. $\Phi|_{\partial V} = \kappa$

を満たすとき, κ は <u>同変 0-ボルダント</u> と言う. G-作用 $\kappa : G \hookrightarrow \mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ の同値類を (κ, Σ_g), 同値類の全体を Ω_G と書くことにする.

Ω_G は同変連結和によりアーベル群となる (詳しくは [6] を参照). Ω_G の単位元は同変 0-ボルダントな作用の同値類, $(\kappa, \Sigma_g) \in \Omega_G$ の逆元は $(\kappa, -\Sigma_g)$ である. Ω_G を G の <u>同変ボルディズム群</u> と呼ぶことにしよう (正確には 2 次元有向同変ボルディズム群). 例えば G が位数 m の巡回群なら $\Omega_G \cong \mathbb{Z}^{[(m-1)/2]}$, G が

3 次対称群なら $\Omega_G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であることが知られている. 同変ボルディズムの一般論から, 同変ボルディズム群と森田-Mumford 類には以下の関係があることがわかる.

命題 2. G を有限群, $n \geq 0$ を整数とする. そのとき

$$\Omega_G \to H^{4n+2}(G,\mathbb{Z}), \quad (\kappa, \Sigma_g) \mapsto e_{2n+1}(\kappa)$$

は well-defined な準同型である.

上の命題から, 奇数次の森田-Mumford 類が, 同変ボルディズム不変量であることがわかる. 一方で偶数次の森田-Mumford 類は, 同変ボルディズム不変量では ない. 実際同変ボルダントな二つの G-作用で, 対応する森田-Mumford 類が異なるものを構成できる. 同様に mod 2 森田-Mumford 類に関しては以下のことがわかる.

命題 3. G を有限群, $n \geq 0$ を整数とする. そのとき

$$\Omega_G \to H^{2n}(G,\mathbb{F}_2), \quad (\kappa, \Sigma_g) \mapsto e_n(\kappa)$$

は well-defined な準同型である.

従って mod 2 森田-Mumford 類は (偶数次の場合も) 同変ボルディズム不変量であることがわかる (ただし筆者は mod 2 森田-Mumford 類は全て自明であると予想している).

さて G の同変ボルディズム類の不変量として, よく知られたものに G-符号数 (G-signature) がある. G-作用 $\kappa : G \hookrightarrow \mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ に対して, κ で不変な Σ_g の複素構造を選ぶことにより, κ を種数 g のコンパクト Riemann 面 C の正則変換群と見なすことができる. そのとき G-符号数 $\sigma(\kappa, \Sigma_g)$ は

$$\sigma(\kappa, \Sigma_g) := H^0(C, \Omega^1) - \overline{H^0(C, \Omega^1)} \in R(G)$$

と定義される. ここで $H^0(C,\Omega^1)$ は C の正則 1 形式の全体, $R(G)$ は G の複素表現環である. $\sigma(\kappa, \Sigma_g)$ は同変ボルディズム類 $(\kappa, \Sigma_g) \in \Omega_G$ の不変量であり, 対応

$$\Omega_G \to R(G), \quad (\kappa, \Sigma_g) \mapsto \sigma(\kappa, \Sigma_g) \tag{2}$$

は準同型となることが知られている (詳しくは [3, 8] を参照). Atiyah-Bott の不動点定理 [3](あるいは Eichler の跡公式) を用いることにより, 原理的には $\sigma(\kappa, \Sigma_g)$ (の指標) を κ の不動点データから計算できる.

奇数次の森田-Mumford 類は同変ボルディズム不変量であるが, 実は 2-torsion を除いて G-符号数で決まってしまう. 正確に言うと

定理 4. $\kappa_1 : G \hookrightarrow \mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ と $\kappa_2 : G \hookrightarrow \mathrm{Diff}_+\Sigma_h$ を二つの G-作用とする. もし $\sigma(\kappa_1, \Sigma_g) = \sigma(\kappa_2, \Sigma_h)$ ならば, 全ての $n \geq 1$ に対して $e_{2n-1}(\kappa_1)$ と $e_{2n-1}(\kappa_2)$ は位数 2 の元を除いて一致する.

$n = 1$ の場合と G が巡回群の場合は「位数 2 の元を除いて」という条件は不要である (一般の場合にこの条件が必要かどうかはわからない). 証明の方針を述べよう. Ω_G^0 を自由 G-作用の同変ボルディズム類のなす部分群とする. 自由 G-作用の森田-Mumford 類が自明であることから. 命題 2 の準同型は

$$\Omega_G/\Omega_G^0 \to H^{4n+2}(G, \mathbb{Z})$$

に分解する. 一方自由 G-作用の G-符号数は自明であるので準同型(2) も

$$\Omega_G/\Omega_G^0 \to R(G)$$

に分解する. 筆者が実際に証明したのは

$$\ker(\Omega_G/\Omega_G^0 \to R(G)) = (\Omega_G/\Omega_G^0)_{\mathrm{torsion}} \tag{3}$$

となることである. 証明には Grieder [5, 6] による Ω_G/Ω_G^0 の不動点データによる特徴づけ, Atiyah-Bott の不動点定理, および cotangent 和に関する数論的な事実を用いる. Grieder [5] により, Ω_G/Ω_G^0 は $\mathbb{Z}^k \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l$ という形のアーベル群と同型であることが証明されているので, 命題 2 と等式(3) により定理 4 は証明される.

なお G が巡回群の場合は準同型 $\Omega_G \to R(G)$ が単射となるので, 定理 4 は命題 2 から直ちに従う. また $n = 1$ の場合は森藤孝之氏の写像トーラスの η-不変量に関する結果 [14] を使って証明することも可能である.

5. 整係数 Riemann-Roch 公式

写像類群 Γ_g の $H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})$ への自然な作用は, 準同型 $\Gamma_g \to Sp(2g, \mathbb{R})$ を誘導する. $Sp(2g, \mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群は $U(g)$ なので, 上の準同型は分類空間の連続写像

$$K(\Gamma_g, 1) \to BU(g)$$

を誘導する. 形式和 $\sum_k x_k^n$ に対応する特性類 $s_n \in H^{2n}(BU(g), \mathbb{Z})$ を Newton 類という ($\sum_n s_n/n!$ が Chern 指標に他ならない). s_n の $K(\Gamma_g, 1) \to BU(g)$

による引き戻し $s_n \in H^{2n}(\Gamma_g, \mathbb{Z})$ を Γ_g の Newton 類と呼び同じ記号で表す. $\mathbb{Q}$-係数コホモロジーにおいては, 奇数次の森田-Mumford 類と Newton 類は定数倍を除いて等しい. 実際 Grothendieck-Riemann-Roch 定理により次の等式が成り立つ ([15] を参照):

$$e_{2n-1} = (-1)^n \frac{2n}{B_{2n}} s_{2n-1} \text{ in } H^{4n-2}(\Gamma_g, \mathbb{Q}). \tag{4}$$

ここで B_{2n} はベルヌイ数を表す. 整数 N_{2n}, D_{2n} を

$$B_{2n} = \frac{N_{2n}}{D_{2n}}, \quad (N_{2n}, D_{2n}) = 1$$

により定義する. 等式 (4) よりコホモロジー類

$$N_{2n}e_{2n-1} - (-1)^n 2nD_{2n}s_{2n-1} \in H^{4n-2}(\Gamma_g, \mathbb{Z})$$

の位数は有限であることがわかる. ここでいきなり予想を述べよう.

予想 2 (整係数 Riemann-Roch 公式). 全ての $n \geq 1$ に対して

$$N_{2n}e_{2n-1} = (-1)^n 2nD_{2n}s_{2n-1} \tag{5}$$

が $H^{4n-2}(\Gamma_g, \mathbb{Z})$ において成り立つ.

Harer [7] による $H^2(\Gamma_g, \mathbb{Z})$ の計算から $n = 1$ の場合は予想は正しい. また予想 1(の殆ど) は予想 2 から導かれる. なぜならば素数 p に対して $2n - 1 \equiv -1 \pmod{p-1}$ ならば, von Staudt の定理 ([9] を参照) により p は D_{2n} を割り切る. したがって (5) の右辺の mod p reduction は自明である. 他方で N_{2n} は p と素であるから $e_{2n-1} \in H^{4n-2}(\Gamma_g, \mathbb{F}_p)$ が自明であることがわかる.

予想 2 に対する最初の肯定的証拠は, 河澄氏との共同研究で得られた以下の結果である.

定理 5. G を Γ_g の有限巡回部分群とする. G の Σ_g への作用が半自由ならば等式 (5) が $H^*(G, \mathbb{Z})$ で成り立つ. すなわち

$$N_{2n}e_{2n-1}|_G = (-1)^n 2nD_{2n}s_{2n-1}|_G.$$

証明は, 両辺の不動点データによる表示を比較することによる. 比較の際に鍵になるのが Voronoi の恒等式である. ここで自然数 $m \geq 2$, $n, a \geq 1$, $(a, m) = 1$ に対して

$$(a^{2n} - 1)N_{2n} \equiv (-1)^{n-1} 2nD_{2n}a^{2n-1} \sum_{j=1}^{m-1} j^{2n-1} \left[\frac{ja}{m}\right] \pmod{m}$$

を Voronoi の恒等式という ([9] を参照).

その後, 河澄氏は超楕円的曲線の族を考察することにより, 超楕円的写像類群に対しても予想が正しいことを証明した (Voronoi の恒等式も使われる).

定理 6 ([10]). 全ての $n \geq 1$ に対して

$$N_{2n}e_{2n-1} = (-1)^n 2nD_{2n}s_{2n-1}$$

が $H^{4n-2}(\mathcal{H}_g, \mathbb{Z})$ において成り立つ.

REFERENCES

1. T. Akita, Nilpotency and triviality of mod p Morita-Mumford classes of mapping class groups of surfaces, *Nagoya Math. J.* **165** (2002), 1–22.
2. T. Akita, N. Kawazumi, and T. Uemura, Periodic surface automorphisms and algebraic independence of Morita-Mumford classes, *J. Pure Appl. Algebra* **160** (2001), 1–11.
3. M. F. Atiyah, R. Bott, The Lefschetz fixed point theorem for elliptic complexes II, *Ann. Math.* **88** (1968) 546–604.
4. C. J. Earle and J. Eells, A fibre bundle description of Teichmüller theory, *J. Differential Geometry* **3** (1969) 19–43.
5. R. Grieder, Geometric representation theory and G-signature, *preprint*, math.AT/9811102.
6. ———, G-actions on Riemann surfaces and the associated group of singular orbit data, *preprint*, math.AT/9902048.
7. J. L. Harer, The second homology group of the mapping class group of an orientable surface, *Invent. Math.* **72** (1983) 221–239.
8. F. Hirzebruch and D. Zagier, *The Atiyah-Singer theorem and elementary number theory*, Publish or Perish, Boston, 1974.
9. K. Ireland and M. Rosen, *A classical introduction to modern number theory*, Second edition, Springer, New York, 1990.
10. N. Kawazumi, Weierstrass points and Morita-Mumford classes on hyperelliptic mapping class groups, *preprint*.
11. N. Kawazumi and T. Uemura, Riemann-Hurwitz formula for Morita-Mumford classes and surface symmetries *Kodai Math. J.* **21** (1998) 372–380.
12. S. P. Kerckhoff, The Nielsen realization problem, *Ann. of Math.* (2) **117** (1983) 235–265.
13. I. Madsen and U. Tillmann, The stable mapping class group and $Q(\mathbb{C}P^{\infty}_{+})$, *Invent. Math.* **145** (2001), 509–544
14. T. Morifuji, The η-invariant of mapping tori with finite monodromies, *Topology Appl.* **75** (1997) 41–49.
15. S. Morita, Characteristic classes of surface bundles *Invent. Math.* **90** (1987) 551–577.
16. ———, Structure of the mapping class groups of surfaces: a survey and a prospect, *Proceedings of the Kirbyfest* (Berkeley, CA, 1998), Geometry & Topology Monographs **2**, Geometry & Topology, Coventry, 1999, 349–406.

17. D. Mumford, Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves, *Arithmetic and geometry,* Vol. II, *Progr. Math.*, Birkhäuser Boston, **36** (1983) 271–328.
18. D. Quillen, The spectrum of an equivariant cohomology ring. II, *Ann. of Math.* (2) **94** (1971) 573–602.
19. P. Symonds, The cohomology representation of an action of C_p on a surface, *Trans. Amer. Math. Soc.* **306** (1988) 389–400.
20. T. Uemura, Morita-Mumford classes on finite cyclic subgroups of the mapping class group of closed surfaces, *Hokkaido Math. J.* **28** (1999) 597–611.

北海道大学大学院理学研究科数学専攻

E-mail address: `akita@math.sci.hokudai.ac.jp`